

**Recepción:** Noviembre 09 de 2017

**Aceptación:** Enero 28 de 2018

**Publicación:** Junio 30 de 2018

## **Desarrollo del pensamiento geométrico a partir del uso de estrategias didácticas soportadas en herramientas computacionales y el modelo Van Hiele.**

Development of geometric thinking based on the use of didactic strategies supported by computational tools and the Van Hiele model.

### **Eugenio Therán Palacio.**

Universidad de Sucre  
Institución Educativa Sabaneta de San Juan de Betulia, Sucre.  
Colombia.  
Magister en Educación.  
Especialista en Educación Matemática.  
eugeniotheran@gmail.com

### **Elver Oviedo Vergara.**

Universidad de Sucre  
Institución Educativa José Yances Mutis de Chinú – Córdoba.  
Colombia.  
Magister en Educación.  
elveroviedo@hotmail.com.

## Resumen

En el presente artículo se presenta un reporte de la investigación “Estrategias Didácticas Para Potenciar El Pensamiento Geométrico Aplicando Tecnologías Computacionales y El Modelo de Van Hiele”, producto del trabajo de grado de los autores en el marco de la Maestría en Educación del SUE Caribe, Sede Montería. El problema de investigación consistió en indagar si el pensamiento geométrico de los estudiantes se potencia por el empleo de estrategias didácticas que involucren el uso del software Cabri y el modelo de Van Hiele. Los objetivos apuntan a explorar si la competencia matemática se desarrolla en los estudiantes mediante la aplicación de actividades que engloben el uso del software Cabri y el modelo de Van Hiele y si existen diferencias significativas entre hombres y mujeres en lo que respecta al desarrollo del pensamiento geométrico. Se empleó un diseño cuasiexperimental, desarrollando las actividades con estudiantes de dos cursos del grado sexto de la Institución Educativa Gabriel García Márquez de Corozal, Sucre, Colombia.

## Abstract

This article shows a report of the research “Didactic Strategies to Strengthen Geometric Thinking Applying Computational Technologies and the Van Hiele Model”, product of the authors' degree work within the framework of the Master in Education of the SUE Caribe. The research problem was to inquire whether the geometric thinking of the students is enhanced by the use of teaching strategies that involve the use of Cabri software and the Van Hiele model. The objectives aim to explore whether mathematical competence develops in students through the application of activities that include the use of Cabri software and the Van Hiele model and if there are significant differences between men and women in terms of the development of geometric thinking . A quasi-experimental design was used, developing activities with students of two sixth grade courses of the Gabriel García Márquez Educational Institution of Corozal, Sucre, Colombia.

### Palabras Clave

Pensamiento Geométrico; Estrategia didáctica; Modelo de Van Hiele; Software Cabri.

### Keywords

Geometric Thinking; Didactic strategy; Van Hiele's model; Cabri software.

## Introducción

A menudo, el aprendizaje de la geometría se ha basado casi exclusivamente en el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas. Sumado a esto, la escuela confinó la enseñanza de la geometría a los aspectos métricos (aritmización) y a una introducción a la trigonometría, caracterizándose a la vez por una fuerte tendencia a la resolución automática de problemas (Martín, 2003).

Por esta razón, las últimas tendencias en el campo de la educación matemática señalan la necesidad de recuperar el abordaje de contenidos geométricos desde un mejor conocimiento del espacio, y como una fuente de modelos y situaciones problemáticas, que permita enriquecer el aprendizaje. De esta manera, se propone hacer énfasis en los procesos de pensamiento propios de las matemáticas para ahondar su complejidad desde el fortalecimiento de las representaciones semióticas y comunicativas, y pasar a segundo plano, la mera transferencia de contenidos.

Este estudio partió de la necesidad de fortalecer las competencias de los docentes del área de matemáticas, de tal suerte que se pudiera evidenciar innovación en las prácticas pedagógicas y en el empleo de metodologías que apuntaran estratégicamente hacia el logro de un mejor desempeño de los educandos y hacia el estudio y la motivación por aprender las matemáticas partiendo de situaciones cotidianas puestas en escena en el aula de clase.

De esta perspectiva, esta investigación de alguna manera se pretendió validar las tecnologías computacionales como herramientas muy poderosas para reorganizar el currículo de geometría y aumentar el espectro de posibilidades didácticas frente a la necesidad de desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes.

## Referentes teóricos

### Tecnologías computacionales y su uso en la geometría.

La matemática concebida como un saber-hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas (De Guzmán, 2004). En este contexto, la enseñanza de la geometría ofrece un interesante desarrollo hacia una nueva conceptualización que se asocia con el estudio de las propiedades invariantes de las figuras geométricas. Esto permite a los estudiantes abrir la posibilidad de experimentar con una especie de “materialización” de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, y vivir un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan. Por consiguiente, es posible esperar que los

estudiantes que trabajen con un programa de geometría dinámica avancen en su comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que seguirían si utilizan medios tradicionales (Castiblanco, 2004).

Ahora bien, los programas de geometría dinámica han abierto nuevas posibilidades para la geometría escolar. La principal novedad es que las figuras dejan de ser estáticas y del libro saltan a la pantalla del computador para presentarse en forma de animaciones para que se pueda observar desde distintos puntos de vista. Pero no es sólo el movimiento de las figuras lo que proporciona interés para el aprendizaje de las matemáticas, lo realmente innovador es que los diseños pueden ser concebidos para que se puedan modificar ciertos parámetros en la construcción y comprobar los efectos de los cambios.

Una de estas herramientas computacionales, es Cabri-Graph, el cual a principios de los años 80 fue desarrollado por el equipo EIAH del Laboratorio Leibniz, en Grenoble, Francia, con la finalidad de trabajar teoría de gráficas. Unos años más tarde, se pensó en un paquete que permitiera crear, modificar y manipular figuras geométricas en tiempo real; Cabri-Géomètre fue desarrollado por el investigador Jean-Marie Laborde, y contó con la colaboración de Frank Bellemain. Posteriormente, Texas Instruments incluye este paquete en su calculadora TI-92, primera calculadora geométrica.

Es así como Cabri Géomètre fue uno de los primeros programas de geometría dinámica con una serie de características que lo han ido convirtiendo en un recurso muy especial para las clases de matemáticas de todos los niveles. Entre las principales características de este programa se pueden resaltar:

- Puede ser utilizado tanto para construcciones elementales en los primeros cursos como otras mucho más complejas en las que intervengan multitud de objetos entrelazados.
- Admite el trabajo con ejes coordenados lo que le hace una herramienta muy poderosa para el estudio de la geometría analítica en el plano y el análisis de funciones.
- Se pueden preparar menús personalizados con los que se limita las herramientas disponibles para realizar una tarea.
- Por la forma de trabajar, se establece muy claramente la diferencia entre “construir” y “dibujar”.
- Se puede dibujar un cuadrado situando cuatro vértices en el lugar correcto sin que haya relaciones entre ellos o se puede construir un cuadrado mediante perpendiculares y con la ayuda de un compás para que los lados sean iguales. El cuadrado dibujado dejará de serlo en cuanto mueva uno de sus vértices, mientras que el construido se desplazará, se hará más grande o más pequeño, pero mantendrá las características propias del cuadrado (perpendicularidad e igualdad de medidas).

Este tipo de programas computacionales, permiten evidenciar que la geometría ayuda a los estudiantes a controlar sus relaciones con el espacio, a representar y a describir en forma racional el mundo que los rodea y a estudiar los entes geométricos como modelizaciones de esa realidad. Sin embargo, el potencial didáctico de la geometría dinámica va más allá de su poder ilustrativo,

pues se trata de problematizar la visualización, hacerla operativa, de manera que surja de manera natural la necesidad de explorar, conjeturar, predecir, verificar.

### Estrategias Didácticas.

En este estudio se tienen en cuenta las estrategias didácticas como una forma de sistematizar actividades y recursos que los profesores utilizan en su práctica educativa; determina un modo de actuar propio y tiene como principal objetivo facilitar el aprendizaje de nuestros alumnos (Roser, 1995). Cuando se habla de estrategias didácticas, es necesario considerar dos vertientes, las de enseñanza y las de aprendizaje. Las primeras hacen referencia a las “ayudas” que se proporcionan al aprendiz y pretenden facilitar intencionalmente un procesamiento más profundo de la información nueva, y son planeadas por el docente, el planificador, el diseñador de materiales o el programador de software educativo. Una estrategia de aprendizaje es un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) que un alumno adquiere y emplea de forma intencional como instrumento flexible para aprender significativamente y solucionar problemas y demandas académicas (Díaz Barriga et al, 1991 citado por Díaz Barriga, 2000).

Díaz Barriga y Hernández Rojas (2000) ubican los diferentes tipos de estrategias en tres grandes grupos a los que definen del siguiente modo:

- Estrategias de apoyo: se ubican en el plano afectivo-motivacional y permiten al aprendiz mantener un estado propicio para el aprendizaje. Pueden optimizar la concentración, reducir la ansiedad ante situaciones de aprendizaje y evaluación, dirigir la atención, organizar las actividades y tiempo de estudio.
- Estrategias de aprendizaje o inducidas: procedimientos y habilidades que el alumno posee y emplea en forma flexible para aprender y recordar la información, afectando los procesos de adquisición, almacenamiento y utilización de la información.
- Estrategias de enseñanza: consisten en realizar manipulaciones o modificaciones en el contenido o estructura de los materiales de aprendizaje, o por extensión dentro de un curso o una clase, con el objeto de facilitar el aprendizaje y comprensión de los alumnos. Son planeadas por el agente de enseñanza (docente, diseñador de materiales o software educativo) y deben utilizarse en forma inteligente y creativa.

### Modelo De Van Hiele.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, como se reconoce mundialmente, está centrado en las insuficiencias que observaban todos los años los esposos holandeses Pierre y Dina Van Hiele en sus clases de Geometría en la secundaria básica. Constituyó su tesis doctoral en 1957; sin embargo, es en 1976 que, en Estados Unidos, Izaak Wirzup reconoce su interés por el modelo y desde entonces este ha sido tan difundido que "en la actualidad, casi todas las investigaciones sobre geometría, incluidas las de diseño curricular, lo tienen en

cuenta" (Proenza, 2002). Van Hiele propone un modelo de estratificación del conocimiento humano, en una serie de niveles de conocimiento, los que permiten categorizar distintos grados de representación del espacio, presenta un nivel descriptivo y uno prescriptivo. El primero explica las formas en que razonan los alumnos a través de cinco niveles: Visualización, Análisis, Deducción informal, Deducción formal y Rigor.

Ilustración 1. Niveles de conocimiento de Van Hiele.



Fuente: Adaptación a partir de Van Hiele (1957).

En el primer nivel de Visualización se considera los conceptos o figuras en su globalidad. No se toma en cuenta los elementos y sus propiedades. En el segundo nivel de Análisis surge el descubrimiento y la generalización de propiedades, a partir de la observación de algunos casos. Para el tercer nivel de Deducción informal, se presenta la comprensión y la posibilidad de establecer relaciones a través de implicaciones simples entre casos. En el cuarto nivel de Deducción formal, se efectúan las demostraciones formales, los usos de axiomas y postulados, entre otras cuestiones. Para el quinto nivel de Rigor, aparece el razonamiento deductivo, sin ayuda de la intuición. Dentro del nivel prescriptivo del modelo de Van Hiele se presentan pautas a seguir en la planificación de las actividades de aprendizaje, que permiten detectar el progreso del razonamiento por medio de cinco fases de aprendizaje: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración.

En la primera fase: "Información" el profesor debe diagnosticar lo que saben los alumnos sobre el tema que se va abordar y la forma de razonar que tienen. Los alumnos entran en contacto con el objetivo propuesto. Para la segunda fase: "Orientación dirigida" el profesor debe guiar el proceso para que los alumnos vayan descubriendo lo que va a constituir el centro de este nivel. Esta fase es el centro del aprendizaje, que le va a permitir pasar al otro nivel, y construir los elementos propuestos. El profesor debe planificar las actividades que le permitan establecer las características de este nivel. En la tercera fase: "Explicitación" Los alumnos deben estar conscientes de las características y propiedades aprendidas

anteriormente y consolidan su vocabulario. Para la cuarta fase de “Orientación libre” se afianzan los aspectos básicos y las actividades que permitan resolver situaciones nuevas con los conocimientos adquiridos anteriormente. En la quinta fase de “Integración” se tiene por objetivo establecer y completar las relaciones que profundicen el concepto.

En síntesis, el modelo de Van Hiele permite explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico y cómo es posible ayudar a los alumnos a mejorar su aprendizaje.

## Metodología

Este estudio de corte mixto, emplea algunos métodos cualitativos y cuantitativos, de acuerdo con las variables conceptuales y operacionales que se definieron.

El objetivo de la investigación consistió en indagar si el pensamiento geométrico de los estudiantes se potencia por el empleo de estrategias didácticas que aplican el uso de programas computacionales y el modelo de Van Hiele.

El estudio se realizó en dos cursos del grado sexto de la Institución Educativa Gabriel García Márquez, de Corozal, Sucre, Colombia. Los dos grupos de sexto grado pertenecen a estratos socioeconómicos bajos y vienen de la zona rural del municipio en su minoría, la mayor parte de ellos, de barrios marginales de la zona urbana con edades oscilan entre los 11 y 14 años.

## VARIABLES.

Las variables estudiadas fueron:

Tabla 1: Variables de Estudio.

Variable	Descripción	Niveles
Pensamiento geométrico desarrollado a partir del modelo de Van Hiele	Es la aprehensión del concepto de “Cuadriláteros”, que está dado por los indicadores de estos tres niveles:	Primer nivel: Visualización - Dibujan, recortan o construyen diferentes tipos de cuadriláteros conocidos y los reconocen en diferentes contextos. - Identifican cuadrados, trapecios y rombos etc., por su aspecto físico. - Cada clase se considera disjunta. 12  Segundo nivel: Análisis - Definen un rectángulo como un polígono de 4 lados (cuadriláteros), paralelos de dos en dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales etc, pero no se relacionan unas propiedades con otras. - Dan definiciones informales de los distintos tipos de cuadriláteros. - Relacionan las familias de cuadriláteros por separado, continúan percibiéndolas como clases

Eugenio Therán Palacio  
Elver Oviedo Vergara

disjuntas

Tercer nivel: Deducción informal

- Se clasifican las familias de cuadriláteros, basándose en sus propiedades matemáticas.
- Se dan definiciones formales de los distintos cuadriláteros.
- Se pueden deducir unas propiedades a partir de otras, dando justificaciones abstractas informales.

El uso de programas computacionales Es el empleo del programa computacional: Software Cabri Geomètre desarrollado por Yves Baulac, Franck Bellemain y Jean Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica LSD2 del instituto de Informática y Matemáticas aplicadas de Grenoble (Imag) Francia.

Pensamiento geométrico que no es desarrollado a partir del modelo de Van Hiele Es el conocimiento esperado para el eje Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos de los estándares de matemáticas para el conjunto de grados de 6° a 7° grado de educación básica secundaria propuesto por el Ministerio de Educación Nacional.

Fuente: Elaboración propia.

## Resultados

En la sistematización de la preprueba, se tabularon los datos agrupando los indicadores de desempeños para los niveles I y II de Van Hiele, así:

Tabla 2. Resultados de la preprueba.

Indicadores de Desempeño	% NIÑOS	% NIÑAS	EVALUACION
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de distintos tamaños y posiciones en aquellos que <b>no</b> tienen ángulos rectos (trapezios y trapezoides, rombos y romboides), dos ángulos rectos (trapezio y rectángulo) y cuatro ángulos rectos (rectángulos y cuadrados).	22 de 26 ó 84.61%	23 de 34 u 82.14%	El desempeño es alto tanto para niños como niñas.
Identifica ejes de simetría en cuadriláteros de distintas formas y los clasifican en aquéllos que tienen cero, uno, dos y cuatro ejes de simetría.	12 de 26 ó 46.15%	16 de 34 ó 57.14%	Dificultades con este ítem. Ello demuestra que esos contenidos son pocos trabajados en primaria.

Eugenio Therán Palacio  
Elver Oviedo Vergara



Dibuja cuadriláteros a partir de características dadas, en papel cuadriculado y apoyándose en la regla y en la escuadra.	24 de 26 ó 92.31%	24 de 34 ó 85.71%	Desempeño Alto. En relación con el dibujo geométrico los niños en su mayoría (86%) identificaron cuadriláteros usando regla y la escuadra.
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de acuerdo con sus componentes (ángulos, lados) y características.	23 de 26 ó 88.96%	24 de 34 ó 85.71%	Desempeño alto. La mayoría de los niños y niñas identificaron cuadriláteros.
Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.	22 de 26 ó 84.61%	19 de 34 ó 55.88%	Aceptablemente (utilizan coordenadas y ubicar parejas en el plano.
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de distintos tamaños y posiciones, en aquéllos que tienen un par de lados paralelos (trapezios), que tienen dos lados paralelos (paralelogramos).	14 de 26 ó 53.84%	16 de 34 ó 57.14%	Aceptablemente diferencian trapezios de paralelogramos.
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de distintos tamaños y posiciones, en aquéllos que tienen todos los lados iguales (cuadrado y rombo), todos los lados diferentes (trapezoides) y dos pares de lados iguales (rectángulo y romboide).	9 de 26 ó 34.61%	14 de 34, ó 41.17 %	Desempeño bajo, es decir, tienen pocos conocimientos sobre los conceptos básicos de trapezios y trapezoides. La confusión la tienen con el rombo y romboides

Fuente: Elaboración propia.

El proceso de intervención tuvo dos momentos: El primero consistió en la revisión de las características invariables de los rectángulos, trapezios-trapezoides y cuadrados; rombos, paralelogramos y romboides. Esto usando la propuesta de las habilidades básicas del pensamiento de la Dra. Margarita De Sánchez. Desde esta perspectiva, se desarrollaron actividades con talleres para identificar y reconocer los cuadriláteros. En el segundo se realizó la exploración de cuadriláteros usando Cabri Géomètre.

Para el análisis de la posprueba, luego de un subperiodo académico de experimentación, con el grupo sexto 1, se pudieron evidenciar los siguientes avances:

Tabla 3. Resultados de la postprueba.

Indicadores de Desempeño	% NIÑOS	% NIÑAS	EVALUACION
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de distintos tamaños y posiciones en aquellos que <b>no</b> tienen ángulos rectos (trapezios y trapezoides, rombos y romboides), dos ángulos rectos (trapezio y rectángulo) y cuatro ángulos rectos (rectángulos y cuadrados).	53.33%, respecto del grupo.	43.33%	Aquí ocurrió que el desempeño es alto tanto para niños como niñas usando guías bajo el modelo van Hiele y la exploración de Cabri (ítems 7, 8, 17, 18, 19,22,24, 23, 25)
Identifica ejes de simetría en cuadriláteros de distintas formas y los clasifican en aquéllos que tienen cero, uno, dos y cuatro ejes de simetría.	40.%	53.33%	Con alto desempeño (83.33%) los estudiantes identifican ejes de simetrías en los cuadriláteros. Se verifica la necesidad de profundizar en estos contenidos con tecnología en primaria (ítem 11). Sólo un 16.67% presentó dificultad
Dibuja cuadriláteros a partir de características dadas, en papel	46%	46.66%	Desempeño Alto. En relación con el dibujo geométrico los niños y niñas en su mayoría (83.33%)

cuadrículado y apoyándose en la regla y en la escuadra.			identificaron cuadriláteros usando regla, la escuadra y Cabri (14-17). Sólo el 10% tuvo dificultad en este ítem
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de acuerdo con sus componentes (ángulos, lados) y características.	40%	46.66%	Desempeño alto. La mayoría de los niños y niñas identificaron cuadriláteros (9, 10)
Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.	40%	56.66%	Solo una minoría (6.66%) presentó dificultades para ubicar parejas ordenadas en el plano.
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de distintos tamaños y posiciones, en aquéllos que tienen un par de lados paralelos (trapezios), que tienen dos lados paralelos (paralelogramos).	53.33%	33.33%	La gran mayoría o 86.66% diferencian trapezios de paralelogramos. Con la ayuda de Cabri la visualización y el arrastre de las figuras, contribuyó a su satisfactoria diferenciación (ítems 9, 19,22)
Clasifica un conjunto de cuadriláteros de distintos tamaños y posiciones, en aquéllos que tienen todos los lados iguales (cuadrado y rombo), todos los lados diferentes (trapezoides) y dos pares de lados iguales (rectángulo y romboide).	50%	56.66%	Desempeño superior (96.66%), es decir, con ayuda del poder del arrastre de Cabri Géomètre se logró visualizar y explorar Desempeño superior (96.66%), es decir, con ayuda del poder del arrastre de Cabri Géomètre se logró visualizar y explorar

Fuente: equipo investigador

Los resultados en la postprueba fueron satisfactorios, la mayoría con desempeños altos, en relación con la Preprueba que mostró muchas dificultades a la hora de reconocer cuadriláteros desde sus simetrías, ángulos y ubicación en el plano cartesiano

## Conclusiones

Esta investigación permitió develar la idea que el desarrollo del pensamiento geométrico-espacial con el modelo de Van Hiele con el apoyo tecnológico son complementarios, imbricados e interestructurados. Por tanto, este escenario de estrategias de manera conjunta potencia en gran medida el desarrollo del pensamiento geométrico, esto para los niveles 1 y 2. La asociación entre Van Hiele y programas de geometría dinámica se convierten en potenciadores de los ámbitos procedimentales y actitudinales de los estudiantes, ya que el trabajo posibilita la colaboración, la puesta en común, la mediación simétrica y el desarrollo de las competencias ciudadanas.

Los resultados de esta investigación constituyen un punto de referencia para futuros estudios que se realicen en esta línea del desarrollo del pensamiento geométrico en entornos dinámicos de aprendizaje con el apoyo de tecnologías Informáticas y computacionales. De manera complementaria, el uso de estrategias basadas en el modelo de Van Hiele junto con herramientas tecnológicas maximiza el aprendizaje de los objetos geométricos, en particular para los que están en la transición del pensamiento concreto al formal.

## Referencias

Castiblanco, A.C. (2004). Seminario Incorporación de las Nuevas Tecnologías computacionales al currículo de la educación básica y media de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.

De Guzmán, M. (2004). Revista Iberoamericana de Educación. OEI, Número 43: Enero-Abril / Janeiro-Abril 2007 A.

Díaz Barriga, F y Hernández Rojas G. (2000). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: McGraw-Hill.

Jiménez, L., Rivero, R., Montes, S. (2005). Experiencia investigativa sobre el Teorema de Pitágoras: Un reporte con la geometría dinámica. Universidad de Sucre.

Martín, A. (2003). Citado en Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653)

Proenza G, Y (2002). La enseñanza de la matemática y su impacto en el desarrollo del pensamiento de los escolares primarios: Un modelo didáctico de estimularlo” . I.C.C.P. de la Habana, Cuba

Roser Boix, Tomas. Estrategias y recursos didácticos en la escuela rural. GRAO. Barcelona. 1995, 139p

Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. Revista Electrónica de Investigación Educativa 4, (1). Recuperado de <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-amestoy.html>