UM OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

UN OBJETO DE APRENDIZAJE PARA LA ENSEÑANZA DE NUMEROS COMPLEJOS

Larissa Weyh Monzon and Marta Rosecler Bez¹

Recibido para publicación: 2 de junio de 2014 - Aceptado para publicación: 12 julio de 2014

ABSTRACT

This paper presents the design and construction of an educational object that focuses on complex numbers and functions destined to high school. The design of the material took into account the important role of semiotic systems of representation in the process of learning mathematics. The construction resulted in a web site with a collection of interactive animations that make use of dynamical systems of algebraic and geometric representation. The product was tested with a group of students in the third year of high school, and the results show that the help of digital tools make easier the teaching-learning of mathematics.

RESUMO

Este artigo apresenta a concepção e a construção de um objeto de aprendizagem que trata de números complexos e funções destinado ao ensino médio da escola básica. Na concepção levou-se em consideração o importante papel que tem os sistemas de representação semiótica no processo de aprendizagem da matemática. A construção resultou em site web com coletânea de animações interativas que fazem uso de sistemas dinâmicos de representação algébrica e geométrica. O produto foi testado com uma turma de alunos do terceiro ano do ensino médio, e os resultados obtidos mostram que o apoio de ferramentas digitais facilitam o ensino-aprendizagem de matemática.

Keywords: Complex numbers and functions, Dynamic systems of semiotic representation, Algebraic and geometric registers.

¹Manuscript received Junho 19, 2014.

Larissa Weyh Monzon is math teacher and collaborator of the Universidade Feevale. R. Lopes Trovão, 333/204/1 – 93320-500 – Novo Hamburgo – RS – Brasil. E-mail: larissamonzon@gmail.com.

Marta Rosecler Bez. Author is of the Universidade Feevale and of the I3C – Instituto Curiosidade, Ciência e Criação. R. Arthur Leopoldo Ritter, 105 – 93.600-000 – Estância Velha – RS – Brasil. E-mail: martabez@gmail.com.

1. INTRODUÇÃO

Dentre os conteúdos que fazem parte do programa da matemática escolar há conteúdos com um forte componente abstrato, visto que as situações de aplicações estão além daquelas que podem ser tratadas no ensino básico. Dentre esses conteúdos, incluímos o assunto *números complexos*, por este motivo é difícil fazer com que esse ensino seja interessante, dificultando sua assimilação.

A autora deste artigo, como professora de matemática de Ensino Médio, se colocou o desafio de responder as perguntas: a) como tornar o estudo de números complexos mais interessante para os alunos? b) para tornar o assunto de números complexos relacionado com outras áreas do conhecimento, como implementar um estudo introdutório de funções de variável complexa no ensino médio, fazendo intensa transição entre aspectos algébricos e geométricos? As perguntas foram respondidas na dissertação *Números complexos e funções de variável complexa no Ensino Médio* – uma proposta didática com o uso de objetos de aprendizagem [1], apresentada no Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS, em abril de 2012. Como parte do trabalho da dissertação, foi construído o site *Números Complexos*, um produto que contém animações interativas, tratando de representações de números complexos, de operações com números complexos e de funções de variável complexa, disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat> no link Biblioteca Virtual. O produto foi usado na experiência de ensino, em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, que validou essa proposta didática.

Neste artigo, inicialmente, tratamos do importante papel que os sistemas de representação (linguagem natural, signos e figuras) têm na aprendizagem da matemática. Depois, apresentamos o produto *Números Complexos* com suas diferentes animações interativas, e

buscamos mostrar o quanto as manipulações dinâmicas dos sistemas de representação podem ajudar no processo de aprendizagem. Os resultados positivos da experiência realizada nos permitiram validar o produto, e assim, divulgar seus resultados.

2. OS SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

É comum encontrarmos na literatura pesquisas sobre o importante papel dos sistemas de representação semiótica no processo de aprendizagem da matemática. Conforme Ernest [2], sendo a semiótica o estudo dos signos que estão em diferentes contextos das atividades humanas, é natural considerar o processo de aprendizagem da matemática também sob esta perspectiva, afinal a matemática originou-se de diferentes signos. Ernest avança na definição do que seria um sistema semiótico no contexto específico da matemática, explicitando três componentes: um conjunto de símbolos que são expressos através da fala ou do texto, e do desenho; um conjunto de regras de produção de signos, incluindo, aqui, aquelas que tratam da organização do discurso que faz uso da composição de signos; um conjunto de relações entre os signos e seus significados. Essa definição procura abarcar as características dos textos, símbolos e desenhos que se integram ao discurso lógico que produz e cristaliza o conhecimento matemático.

Usando a história da matemática, Duval [3] observa o quanto o desenvolvimento das representações semióticas é essencial para a evolução do conhecimento matemático, ou seja, os sistemas de representação são parte da produção de novo conhecimento. Mas a preocupação maior desse autor é quanto ao papel dos sistemas de representação semiótica no processo de aprendizagem da matemática. Na sua teoria introduz a ideia de registro: é um sistema que, além de representar conceitos e ideias, tem regras de funcionamento que

permitem a realização de processos matemáticos que levam a novos conceitos e ideias. Os objetos matemáticos, no geral, são expressos através de diferentes registros, e dentre eles, destacamos: o registro algébrico com suas regras de funcionamento que, por exemplo, levam às resoluções de equações; o registro geométrico com regras de tratamento que levam a identificação dos elementos pertinentes de uma figura, e, dentro desse registro, inclui-se o de natureza gráfica dado por sistema de coordenadas cartesianas e curvas que nele são desenhadas; o registro discursivo em linguagem natural, e também com símbolos, com suas regras convencionais de comunicação.

Outro conceito que tem relevância na teoria de Duval [3] é o de transformação, que explicita o quanto a atividade matemática consiste, essencialmente, de transformações sobre as representações. As transformações se desdobram em dois tipos: tratamentos, caso em que acontecem dentro de um mesmo registro; conversões, caso em que as transformações transitam entre dois diferentes registros. É nas conversões, muito mais do que nos tratamentos, que estão as maiores dificuldades cognitivas dos alunos; e mais, são as conversões que encerram, de modo contundente, os processos que caracterizam a atividade matemática. Um exemplo de dificuldade documentado pelo autor é quanto à conversão da reta desenhada no plano cartesiano (registro gráfico) para sua equação (registro algébrico) e vice-versa. Dentro do conteúdo que estamos trabalhando podemos exemplificar a representação do número complexo na sua forma algébrica e sua representação trigonométrica no plano complexo, são duas representações diferentes e, onde o aluno deve aprender a fazer a transformação entre esses registros, ou seja, a conversão. Segundo Duval, se ele saber fazer essa conversão é porque o aluno concretizou a ideia matemática.

É pertinente observar que os sistemas de representação tem um duplo papel. A evolução

do saber matemático depende de sistemas de representação que cristalizam e geram novos conceitos e ideias, mas são esses mesmos sistemas de representação que devem ser aprendidos pelo aluno, para que ele possa ter acesso ao saber matemático. Ou seja, de um lado tem-se o matemático no processo de criação de representações que veiculam ideias e procedimentos matemáticos; e, de outro lado, tem-se o aluno na situação de aprendiz de conceitos e procedimentos que dependem de entendimento dos sistemas de representação. Segundo Duval [3]: “o pensamento matemático depende da sinergia cognitiva dos registros (...) a coordenação dos registros fornece como que uma extensão das capacidades mentais”, e diríamos que tal constatação se aplica tanto ao matemático quanto ao aprendiz.

É evidente que os sistemas de representação tornam-se mais ou menos versáteis na veiculação de conceitos e processos, dependendo do suporte que se tem a disposição. Hoje, com as mídias digitais, os sistemas se tornam dinâmicos e, assim, facilitam o processo de apropriação de seu funcionamento; e mais, oferecem a possibilidade de manipulações que transitam de um registro a outro.

Mas, mesmo tendo-se o suporte digital para os sistemas de representação, Bartolini Bussi e Mariotti [4] questionam o posicionamento bastante corrente de que os sistemas de representação, implementados com as mídias digitais, são suficientes para garantir a aprendizagem da matemática. É sob perspectiva vygotskiana [5], na qual linguagem e signos são meios que dão suporte à internalização - um processo cognitivo de natureza sociocultural que transforma experiências individuais interpessoais em experiências intrapessoais, que as autoras falam nas ferramentas de mediação semiótica. São recursos tecnológicos que incorporam sistemas de representação e que podem mediar processos de aprendizagem da matemática. Mas o que as autoras discutem é que não

basta tal recurso para que se dê o processo de aprendizagem, explicando que, por um lado, ao manipular o recurso, o aluno constrói significados individuais, e por outro lado, de antemão, no recurso está contida a intencionalidade de um saber matemático. E a questão que se coloca é: como garantir que a construção dos significados individuais estão na direção do saber matemático? Partindo do pressuposto que é o especialista, no caso o professor, que tem condições de avaliar o potencial de mediação do recurso, reservam a expressão ferramenta de mediação semiótica para indicar um recurso tecnológico a ser usado em situação didática concebida para a aprendizagem de determinado conteúdo matemático – ou seja, o professor já conhece, de antemão, o potencial semiótico do recurso no que diz respeito à construção do saber matemático em questão.

As autoras avançam na caracterização de um possível modelo de situação didática que faz uso de uma tal ferramenta de mediação: inicialmente, os alunos recebem as atividades a serem exploradas e se engajam em manipulações que concorrem para construção de significados individuais; a isto, segue-se momento de construção coletiva de significados, a ser conduzido pelo professor. Esse modelo, tanto no momento da exploração quanto no momento de construção coletiva, considera a importância de esquemas de uso sintonizados com habilidades cognitivas que caracterizam a atividade matemática. Nesse sentido, o modelo pressupõe que haja o planejamento das atividades a serem exploradas com o recurso digital, pois é no engajamento às tarefas propostas que progressivamente emergem e se desenvolvem os esquemas de uso. As considerações teóricas das autoras convergem para a tese de que a apropriação dos sistemas de representação digitais e dinâmicos depende de situações didáticas planejadas e é assim que os alunos desenvolvem habilidades para aprender matemática com as ferramentas de mediação semiótica.

Nossa intenção é ir além desse modelo de situação didática. Com a Internet tem-se a explosão da possibilidade de aprendizado com autonomia, sendo o produto educacional desenvolvido bem estruturado para o desenvolvimento dos saberes pretendidos. É pensando nesse cenário que desenvolvemos o produto educacional a ser apresentado na próxima sessão.

3. UM OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Foi levando em consideração a importância do sistema de representação semiótica no processo de aprendizagem e a responsabilidade de fazer uma sequência didática com suporte para o ensino, que iniciamos o trabalho de concepção e construção do objeto de aprendizagem para o ensino de números complexos e funções, tendo clareza sobre a necessidade de que contemple: a) recursos para conversões entre registros; b) recursos para o desenvolvimento de esquemas de uso sintonizados com os procedimentos que caracterizam o pensamento matemático. Conforme já mencionado, o produto resultou no site Números Complexos disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat> no link Biblioteca Virtual. Na Fig. 1 vê-se a sua interface.

O material se organiza através de barra de navegação vertical, disposta à esquerda da tela e consiste de animações interativas feitas no software Geogebra, acompanhadas de

Figura 1. Interface do site Números Complexos.

explicações e de questões a serem exploradas pelo usuário. No material também foram incluídos recortes da coletânea de vídeos *Dimensions: une promenade mathématique* [6]; esses recortes são explicações sobre números complexos e funções.

Na concepção das animações, diferentes aspectos foram considerados: procuramos tirar proveito do dinamismo das figuras, e de forma tal que o usuário pode manipular a animação de acordo com seu interesse e dificuldade, transitando entre registros algébrico e geométrico; diferentes graus de liberdade de manipulação foram estabelecidos, conduzindo a aprendizagem de situações simples as mais elaboradas; foi estabelecido um cuidadoso padrão de cor, texto e acabamento e, assim, em cada animação o que se apresenta de novo são, essencialmente, conceitos e processos matemáticos.

A denominação animação interativa trata de registrar o duplo aspecto do material: é uma animação que se produz mediante manipulação de elementos que estão na tela do computador – no caso, números complexos. Na literatura, tal tipo de recurso vem sendo referido como objeto de aprendizagem: um recurso educacional multimídia, com possibilidades de manipulação e efeitos dinâmicos, voltado para a aprendizagem de um conteúdo específico [7].

Na concepção do produto também levamos em consideração que somente a animação pode não ser suficiente para o aprendizado. Conforme discutido na sessão anterior, é importante o desenvolvimento de esquemas de uso dos sistemas de representação que concorrem para a construção de saberes; as intervenções do professor, sem dúvida, têm importante papel nesse processo. Mas tivemos o propósito de ir adiante, desenvolvendo um material que pode propiciar a aprendizagem com autonomia. Assim, além dos diferentes graus de liberdade de manipulação, que foram intencionalmente implementados, cada animação é acompanhada de conjunto de questões a serem exploradas,

intitulado *Para Pensar*, e a solicitação é feita de forma tal que o aluno é provocado a manipular a animação e a desenvolver esquemas de uso que ajudam no entendimento do conteúdo. No conjunto de questões também foram incluídas aquelas que provocam esquemas de uso na direção de raciocínios generalizadores. No quadro teórico de Bartolini Bussi e Mariotti [4], classificaríamos o produto como uma ferramenta de mediação semiótica, com a característica adicional de favorecer aprendizagens com maior autonomia por parte do usuário.

Nas animações têm-se elementos que são manipuláveis e seu movimento desencadeia efeitos sobre outros elementos. Os primeiros funcionam como variáveis independentes, e são sempre marcados com a cor azul; os elementos que funcionam como variáveis dependentes sempre são marcados em vermelho.

Na apresentação do produto procuramos mostrar o quanto as diferentes animações interativas têm intencionalidade de aprendizagem. Vale realçar a diferença que existe entre esse tipo de recurso e um software no qual se pode trabalhar com muitos conteúdos de matemática, mas nos quais a aprendizagem depende muito das orientações do professor. Na linha de pesquisa que trata do processo de ensino e aprendizagem através de suportes digitais (softwares, objetos de aprendizagem, animações interativas) diríamos que estamos avançando na direção da aprendizagem com autonomia. Isso porque o usuário tem uma ferramenta que dá suporte a explorações, inicialmente, feitas sob a orientação de questões provocativas. As questões contribuem para o desenvolvimento de esquemas de uso e, assim, o usuário pode prosseguir com outras manipulações, na direção de perguntas generalizadoras que dificilmente se colocariam frente a material didático na forma de texto estático.

O material ainda introduz o conteúdo de funções de variável complexa no ensino médio, com o intuito

do aluno aplicar os conhecimentos adquiridos no estudo dos números imaginários em funções, com o enfoque das transformações no plano complexo. Assim, o aluno tem a oportunidade de fazer mais conversões de representações e a possibilidade de aplicar o assunto em uma área do conhecimento que necessita de uma maior interpretação e raciocínio.

4. A EXPERIÊNCIA NA SALA DE AULA

O produto foi testado com turma de terceiro ano do Ensino Médio noturno, em escola da rede pública do Brasil. Foram onze encontros, distribuídos em um mês, totalizando 12 horas, e participaram 26 alunos. Os encontros aconteceram no laboratório de informática da escola, onde havia disponível um computador para cada aluno.

O próprio menu de navegação do produto definiu a sequência de atividades implementada na experiência. A rotina de trabalho, nos diferentes encontros, assim se organizou: inicialmente, aconteceu a exploração individual das animações, orientada pelas questões do Para pensar; então, os alunos redigiram suas respostas na Folha de Atividades entregue pela professora, primeira autora desse artigo, contendo as mesmas questões exploradas. Esse material, junto com as observações registradas pela professora, constituiu o material de análise da experiência e de validação do produto. Os vídeos sobre o conteúdo foram assistidos pelo grande grupo no início da atividade; nas exibições dos vídeos,

grande foi a atenção dos alunos, o que indica que esse recurso poderia ser mais utilizado nas aulas de matemática. Ao longo dos encontros, as intervenções da professora foram, essencialmente, para esclarecer dúvidas dos alunos; em poucos momentos foram feitas intervenções no grande grupo e, no geral, os alunos avançaram nas atividades com bastante autonomia.

A experiência permitiu constatar que o produto é adequado para desencadear o processo de aprendizagem que contempla trabalho com os registros algébrico e geométrico. E mais, foi possível observar que, a partir da manipulação das animações, os alunos foram constantemente provocados nas conversões de registro e, assim, desenvolveram esquemas de uso na direção do ensino almejado – entender as ideias matemáticas em diferentes sistemas de representação.

As respostas dos alunos coletadas deixam claro a conversão dos registros semióticos que realizavam, como mostra a figura 3 a seguir.

A introdução das funções de variável complexa foi bem recebida pelos estudantes, a grande maioria dos alunos teve grande êxito na interpretação das questões respondendo com grande convicção, como mostra a Fig. 4.

De uma forma geral, foi possível observar que frente às animações interativas, acompanhadas das questões Para Pensar, os alunos se colocaram em situação de exploração que conduziu ao desenvolvimento de esquemas de uso cada vez mais elaborados e na direção de resoluções

Figura 2. Aluno trabalhando no objeto de aprendizagem

Figura 3. Exemplo de registro algébrico e geométrico feito pelo aluno

Figura 4. Exemplo de exercícios sobre funções

dentro de espírito generalizador. É importante que se diga que, no momento de elaboração das questões, foi preciso antecipar, com atenção, os esquemas de uso que seriam provocados, e esse é um dos aspectos que contribuiu para que o produto se mostrasse propício para aprendizagem com bastante autonomia.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com a experiência que fez uso do produto educacional Números Complexos indicam que a tecnologia digital pode muito ajudar na compreensão de conceitos e ideias matemáticas que não fazem parte do programa de matemática da escola. Com esse produto é possível ampliar o universo das funções que podem ser estudadas na escola, além de concretizar o aprendizado dos números complexos que já é realiado no ensino médio. Como é citado em Monzon [1], “o uso das tecnologias se apresentou como um grande aliado do ensino, resgatou o interesse dos alunos na aquisição de novos saberes e auxiliou extremamente nas interpretações geométricas, a base do estudo”.

REFERÊNCIAS

[1] MONZON, L. W. . Números Complexos e funções de variável complexa no ensino médio: uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem. 2012. 134f.

Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

- [2] ERNEST, P. A semiotic perspective on Mathematical Activity. Educational Studies in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, v. 61, n.1. 2006 p. 67-101.
- [3] DUVAL, R. A cognitive analysis of problems. of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, v.61, n.1. 2006 p.103-131.
- [4] BARTOLINI BUSSI, M. G.; MARIOTTI, M. A. Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: English, L. et al. (Eds.). Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition, Lawrence Erlbaum: Mahwah, NJ. 2008. p.746-783.
- [5] VYGOTSKY, S. Y. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem: Lev Semenovich Vigotskii, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leontiev. 6. ed. Tradução de Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 1998. (Coleção Educação Crítica).
- [6] LEYS,J.;GHYS,E.;ALVAREZ,A.Dimensions: une promenade mathématique. Disponível em: <http://www.dimensions-math.org/Dim_PT.htm>. Acesso em: 20 jul. 2012.
- [7] WILEY , D. A. Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor and a taxonomy. Disponível em: <<http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc>>. Acesso em 27 jul. 2011.
- [8] FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, v. 24, n. 2. 1994. p. 139-162.